Dipartimento di Statistica Università di Bologna

Matematica finanziaria aa 2012-2013

lezione 15: 8 maggio 2013

professor Daniele Ritelli

www.unibo.it/docenti/daniele.ritelli

Esempio

Un prestito di $1\,000$ € viene rimborsato in regime composto in un anno con rate quadrimestrali costanti al tasso annuo nominale $i = 3,5\%$. All'atto del pagamento della prima e della seconda rata viene addebitata, oltre alla rata, la somma di 2 €, all'atto del pagamento della terza rata viene addebitata una commissione di 1 €. Si chiede il taeg

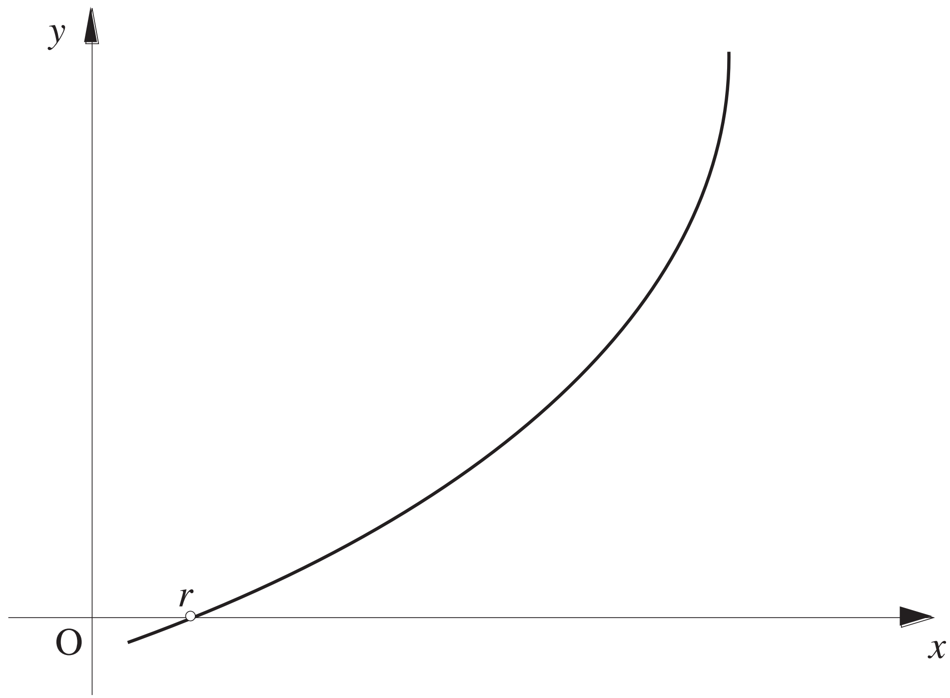
Schema algebrico dei flussi di cassa

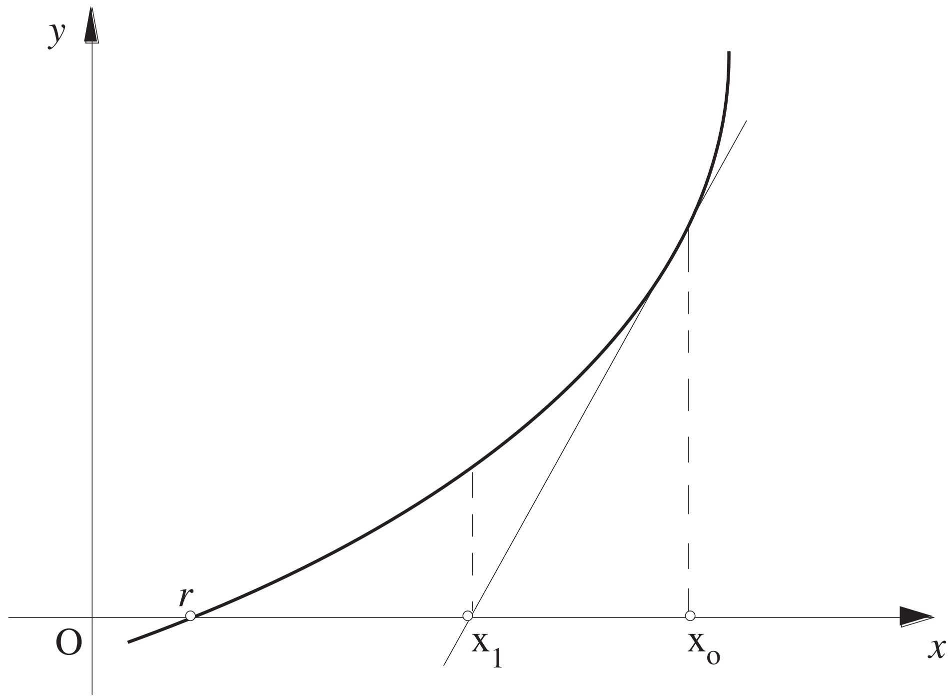
$$A = \alpha_1 v + \alpha_2 v^2 + \alpha_3 v^3$$

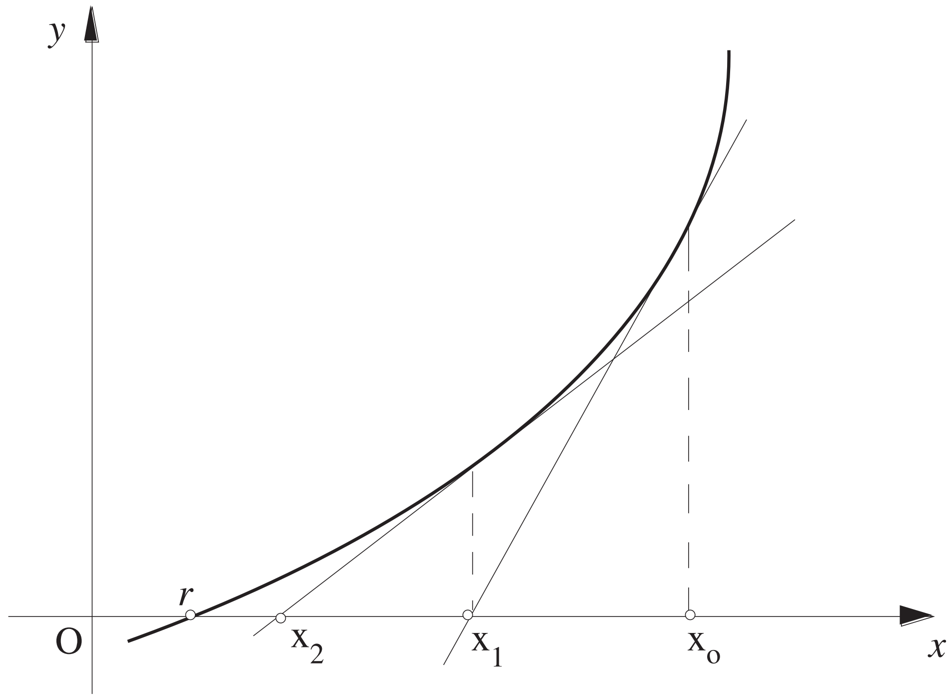
con $v = (1+i)^{-1}$ e $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha + 2$, $\alpha_3 = \alpha + 3$

Il metodo di Newton

Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ con valori di segno opposto agli estremi di $[a, b]$ se f è continua esiste almeno un elemento $r \in]a, b[$ per cui $f(r) = 0$. Se ammettiamo che f sia derivabile con derivata di segno costante in $]a, b[$ tale elemento r è unico.




y
r
O
x1
xo
x


y
r
O
x2
x1
xo
x

$$\begin{cases} x_0 \in [a,b], \ \text{tale che } f(x_0) \neq 0, \\ x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \ \text{per ogni } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 \in [a,b], \text{ tale che } f(x_0) \neq 0, \\ x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Teorema

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2, strettamente crescente e convessa e tale che $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Allora la successione:

$$\begin{cases} x_0 = b, \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \end{cases}$$

converge decrescendo all'unico zero di $f(x)$ in $[a,b]$.

Convessità

Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice:

- **convessa** se per ogni $x_1, x_2 \in I$ ed ogni $\alpha \in]0,1[$ si ha:

$$f\left((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2\right) \leq (1-\alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2),$$

Convessità

Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice:

- **convessa** se per ogni x_1, $x_2 \in I$ ed ogni $\alpha \in]0,1[$ si ha:

$$f\left((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2\right) \leq (1-\alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2),$$

- **strettamente convessa** se per ogni x_1, $x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ ed ogni $\alpha \in]0,1[$ si ha:

$$f\left((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2\right) < (1-\alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2).$$

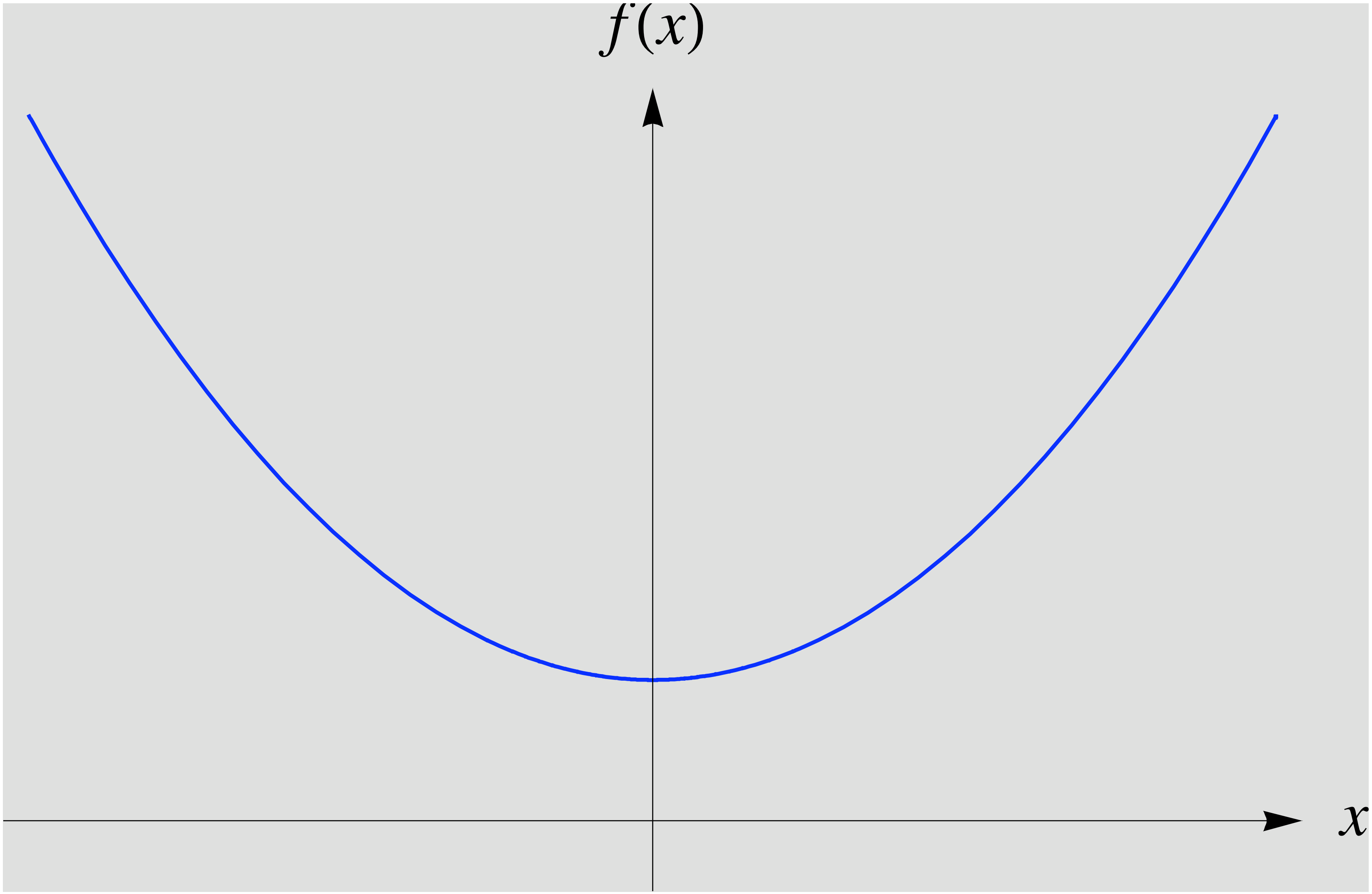


Figura 1: convessità

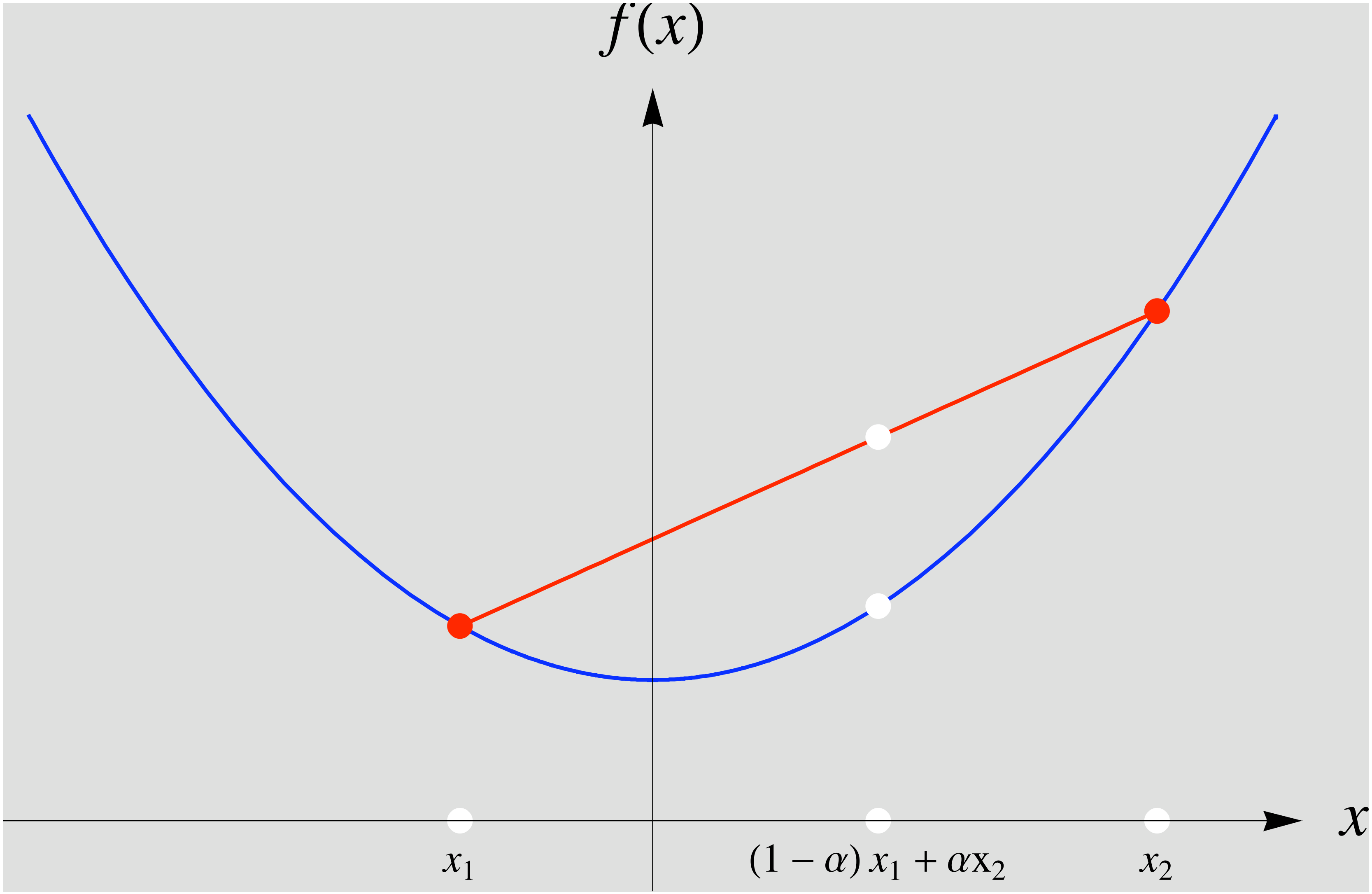


Figura 2: convessità

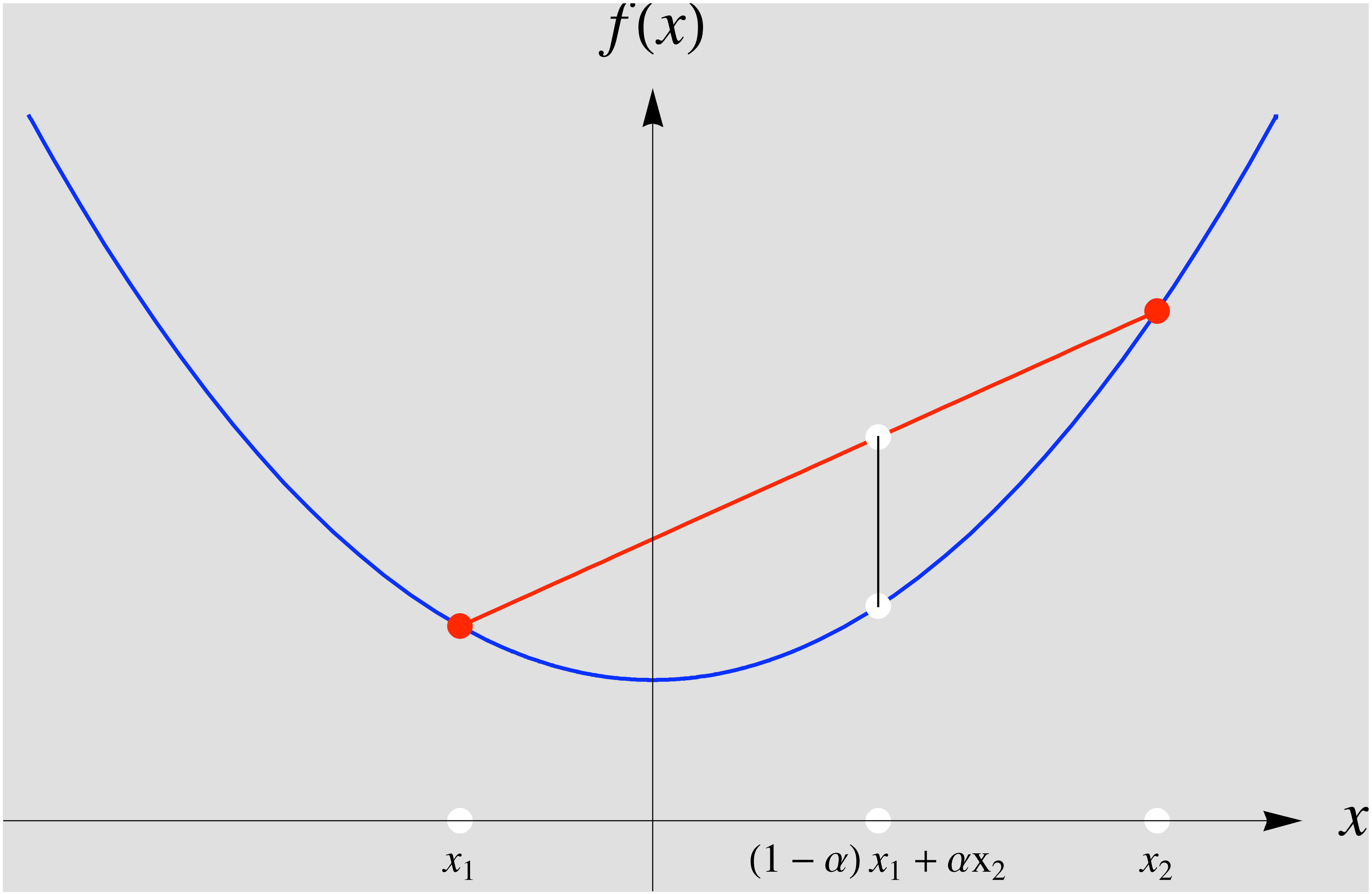


Figura 3: convessità

Teorema Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- f è strettamente convessa
- $f(x) > f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x_0)$ per ogni $x,\ x_0 \in I$

Teorema Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- f è strettamente convessa
- $f(x) > f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x_0)$ per ogni $x,\, x_0 \in I$

allora se f è convessa il suo grafico è sempre al di sopra delle rette tangenti

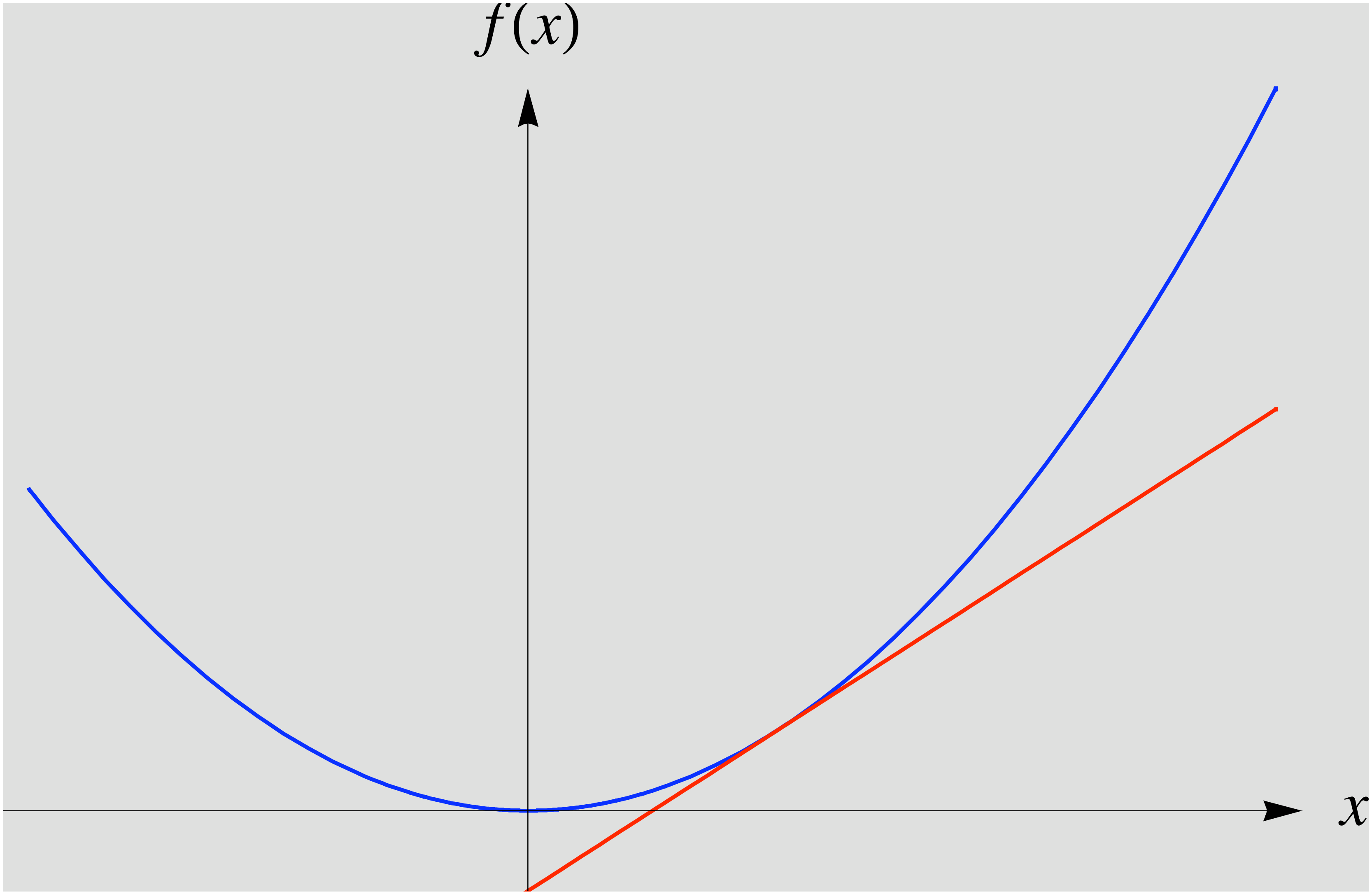


Figura 4: tangenza e convessità

Teorema

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2, strettamente crescente e convessa e tale che $f(a) < 0,\ f(b) > 0$. Allora la successione:

$$\begin{cases} x_0 = b, \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \end{cases}$$

converge decrescendo all'unico zero di $f(x)$ in $[a, b]$.

Dimostrazione

La convessità di $f(x)$ implica $f(x_m) \geq 0$ per ogni $m \in \mathbb{N}$, infatti

$$
\begin{aligned}
& f(x_{n+1}) \geq f(x_n) + f'(x_n)\left(x_{n+1} - x_n\right) = \\
& = f(x_n) + f'(x_n)\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - x_n\right) \\
& = f(x_n) - f(x_n) = 0.
\end{aligned}
$$

Dimostrazione

La convessità di $f(x)$ implica $f(x_m) \geq 0$ per ogni $m \in \mathbb{N}$, infatti

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &\geq f(x_n) + f'(x_n)\,(x_{n+1} - x_n) = \\ &= f(x_n) + f'(x_n)\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - x_n\right) \\ &= f(x_n) - f(x_n) = 0. \end{aligned}$$

Da $f(x_n) \geq 0$ per il fatto che $f(x)$ è crescente, segue subito che, indicato con x^* lo zero di $f(x)$ in $[a, b]$, si ha $x_n \geq x^*$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Questo intanto prova che la successione di Newton è inferiormente limitata,

Tale successione è anche decrescente, essendo:

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \leq 0.$$

Tale successione è anche decrescente, essendo:

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \leq 0.$$

Ma, allora, la successione x_n converge ad un elemento $\bar{x} \in [a, b]$ e dalla relazione:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

passando al limite, ricordando la continuità di $f(x)$, si trova:

$$\bar{x} = \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}.$$

Tale successione è anche decrescente, essendo:

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \le 0.$$

Ma, allora, la successione x_n converge ad un elemento $\bar{x} \in [a, b]$ e dalla relazione:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

passando al limite, ricordando la continuità di $f(x)$, si trova:

$$\bar{x} = \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}.$$

Dunque $f(\bar{x}) = 0$, quindi per iniettività abbiamo $\bar{x} = x^*$.

Metodo di Newton per trovare lo zero di $f(v) = \alpha_3 v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v - A$

Conduce all'iterazione della funzione

$$F(v) = v - \frac{f(v)}{f'(v)} = v - \frac{\alpha_3 v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v - A}{3\alpha_3 v^2 + 2\alpha_2 v + \alpha_1}$$

Torniamo al nostro **Esempio**

Un prestito di 1 000 € viene rimborsato in regime composto in un anno con rate quadrimestrali costanti al tasso annuo nominale $i = 3,5\%$. All'atto del pagamento della prima e della seconda rata viene addebitata, oltre alla rata, la somma di 2 €, all'atto del pagamento della terza rata viene addebitata una commissione di 1 €.

Torniamo al nostro **Esempio**

Un prestito di 1 000 € viene rimborsato in regime composto in un anno con rate quadrimestrali costanti al tasso annuo nominale $i = 3,5\%$. All'atto del pagamento della prima e della seconda rata viene addebitata, oltre alla rata, la somma di 2 €, all'atto del pagamento della terza rata viene addebitata una commissione di 1 €.

$$i_3 = \sqrt[3]{1,035} - 1$$

$$\alpha_{\overline{3}|i_3} = 0,341051$$

$$\alpha = 341,051$$

quindi

$$F(v) = v - \frac{342,051v^3 + 343,051v^2 + 343,051v - 1000}{1026,15v^2 + 686,102v + 343,051}$$

Tasso di partenza: aumentiamo di un punto

$$j_3 = \sqrt[3]{1,045} - 1 = 0,0147805$$

Tasso di partenza: aumentiamo di un punto

$$j_3 = \sqrt[3]{1,045} - 1 = 0,0147805$$

e trasformiamo in $v_0 = (1 + j_3)^{-1} = 0,985435$

Tasso di partenza: aumentiamo di un punto

$$j_3 = \sqrt[3]{1,045} - 1 = 0,0147805$$

e trasformiamo in $v_0 = (1 + j_3)^{-1} = 0,985435$

$$F(0,985435) = 0,986176$$

Tasso di partenza: aumentiamo di un punto

$$j_3 = \sqrt[3]{1,045} - 1 = 0,0147805$$

e trasformiamo in $v_0 = (1 + j_3)^{-1} = 0,985435$

$$F(0,985435) = 0,986176$$

$$F(0,986176) = 0,986175$$

Tasso di partenza: aumentiamo di un punto

$$j_3 = \sqrt[3]{1,045} - 1 = 0,0147805$$

e trasformiamo in $v_0 = (1 + j_3)^{-1} = 0,985435$

$$F(0,985435) = 0,986176$$

$$F(0,986176) = 0,986175$$

Il tasso effettivo trimestrale quindi è

$$i_3^* = \frac{1}{0,986175} - 1 = 0,0140188$$

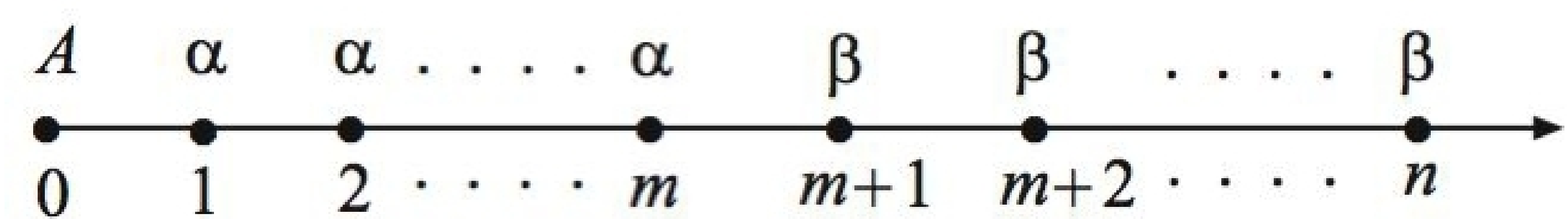
e quello annuo

$$i^* = (1 + i_3^*)^3 - 1 = 0,0426487$$

Tasso effettivo di un prestito

Nel rimborsare A vengono pagate m rate di importo α e $n-m$ rate di importo β si ha l'equazione del rea:

$$\boldsymbol{A = \alpha\, a_{\overline{m}|x} + \beta\, (1+x)^{-m}\, a_{\overline{n-m}|x}}$$



Esempio

€50 000 rimborsati in dodici anni, rate mensili tasso $\boldsymbol{i = 0,055}$

Dopo 6 anni la rata passa a 484 allora il tasso passa a:

1. 0,0571241
2. 0,00522456
3. 0,05224560
4. 0,00645280

Esempio

€50 000 rimborsati in dodici anni, rate mensili tasso $\boldsymbol{i = 0,055}$

Dopo 6 anni la rata passa a 484 allora il tasso passa a:

1. 0,0571241
2. 0,00522456
3. 0,05224560
4. 0,00645280

$$\boldsymbol{A = \alpha\, a_{\overline{m}|x} + \beta\, (1+x)^{-m}\, a_{\overline{n-m}|x}}$$

Esempio

€50 000 rimborsati in dodici anni, rate mensili tasso $\boldsymbol{i = 0,055}$

Dopo 6 anni la rata passa a 484 allora il tasso passa a:

1. 0,0571241
2. 0,00522456
3. 0,05224560
4. 0,00645280

$$\boldsymbol{A = \alpha\, a_{\overline{m}|x} + \beta\, (1+x)^{-m}\, a_{\overline{n-m}|x}}$$

$\boldsymbol{A = 50\,000,\ n = 144,\ m = 72,\ \beta = 484}$ ma

Esempio

€50 000 rimborsati in dodici anni, rate mensili tasso $\boldsymbol{i = 0,055}$

Dopo 6 anni la rata passa a 484 allora il tasso passa a:

1. 0,0571241 2. 0,00522456 3. 0,05224560 4. 0,00645280

$$\boldsymbol{A = \alpha\, a_{\overline{m}|x} + \beta\ (1+x)^{-m}\, a_{\overline{n-m}|x}}$$

$\boldsymbol{A = 50\,000,\ n = 144,\ m = 72,\ \beta = 484}$ ma **manca $\boldsymbol{\alpha}$**

$$\boldsymbol{\alpha = A\alpha_{\overline{144}|\sqrt[12]{1{,}055}-1}}$$

$$\boldsymbol{\alpha = A\alpha_{\overline{144}|\sqrt[12]{1{,}055}-1} = 50\,000 \times 0,0094336}$$

$$\alpha = A\alpha_{\overline{144}|\,\sqrt[12]{1{,}055}-1} = 50\,000 \times 0,0094336 = 471,68$$

$$\boldsymbol{\alpha = A\alpha_{\overline{144}|\sqrt[12]{1{,}055}-1} = 50\,000 \times 0,0094336 = 471,68}$$

allora

$$\boldsymbol{A = \alpha\, a_{\overline{m}|x} + \beta\ (1+x)^{-m}\, a_{\overline{n-m}|x}}$$

diventa

$$\boldsymbol{50\,000 = 471,68 \times a_{\overline{72}|x} + \beta\ (1+x)^{-72}\, a_{\overline{72}|x}}$$

$$\boldsymbol{\alpha = A\alpha_{\overline{144}|\sqrt[12]{1{,}055}-1} = 50\,000 \times 0,0094336 = 471,68}$$

allora

$$\boldsymbol{A = \alpha\, a_{\overline{m}|x} + \beta\ (1+x)^{-m}\, a_{\overline{n-m}|x}}$$

diventa

$$\boldsymbol{50\,000 = 471,68 \times a_{\overline{72}|x} + \beta\ (1+x)^{-72}\, a_{\overline{72}|x}}$$

se al posto di x metto $\sqrt[12]{1,00645280} - 1$ (alternativa 4) il secondo membro vale 66 186,27

$$\boldsymbol{\alpha = A\alpha_{\overline{144}|\,\sqrt[12]{1{,}055}-1} = 50\,000 \times 0,0094336 = 471,68}$$

allora

$$\boldsymbol{A = \alpha\, a_{\overline{m}|x} + \beta\ (1+x)^{-m}\, a_{\overline{n-m}|x}}$$

diventa

$$\boldsymbol{50\,000 = 471,68 \times a_{\overline{72}|x} + \beta\ (1+x)^{-72}\, a_{\overline{72}|x}}$$

se al posto di x metto $\sqrt[12]{1,00645280} - 1$ (alternativa 4) il secondo membro vale 66 186,27

se al posto di x metto $\sqrt[12]{1,05224560} - 1$ (alternativa 3) il secondo membro vale 51 275,27

Non serve a nulla provare la alternativa 2 perché il tasso è inferiore a quello della 4

Non serve a nulla provare la alternativa 2 perché il tasso è inferiore a quello della 4

Il tasso cercato non può che essere il primo

Non serve a nulla provare la alternativa 2 perché il tasso è inferiore a quello della 4

Il tasso cercato non può che essere il primo

In ogni caso qui lo si può verificare

Non serve a nulla provare la alternativa 2 perché il tasso è inferiore a quello della 4

Il tasso cercato non può che essere il primo

In ogni caso qui lo si può verificare

$$a_{\overline{72}|\ \sqrt[12]{1{,}0571241}-1} = 61,0882175$$

Non serve a nulla provare la alternativa 2 perché il tasso è inferiore a quello della 4

Il tasso cercato non può che essere il primo

In ogni caso qui lo si può verificare

$$a_{\overline{72}|\,\sqrt[12]{1{,}0571241}-1} = 61,0882175$$

quindi

$$471,68 \times a_{\overline{72}|\,\sqrt[12]{1{,}0571241}-1} = \mathbf{28\,814,090}$$

poi

$$(1,0571241)^{-72} \times a_{\overline{72}|\sqrt[12]{1{,}0571241}-1} = 43,772526$$

poi

$$(1,0571241)^{-72} \times a_{\overline{72}|\ \sqrt[12]{1,0571241}-1} = 43,772526$$

e quindi

$$484 \times 43,772526 = 21\,185,902$$

poi

$$(1,0571241)^{-72} \times a_{\overline{72}|\sqrt[12]{1,0571241}-1} = 43,772526$$

e quindi

$$484 \times 43,772526 = 21\,185,902$$

sommando

$$\mathbf{28\,814,090 + 21\,185,902 = 49\,999,992}$$

Se invece si vuol risolvere l'equazione

$$\boldsymbol{A = \alpha\, a_{\overline{m}|x} + \beta\ (1+x)^{-m}\, a_{\overline{n-m}|x}}$$

Se invece si vuol risolvere l'equazione

$$\boldsymbol{A = \alpha\, a_{\overline{m}|x} + \beta\ (1+x)^{-m}\, a_{\overline{n-m}|x}}$$

Si pone

$$v = (1+x)^{-1}$$

e si trova:

$$\boldsymbol{(\alpha - \beta) v^{m+1} + \beta v^{n+1} - (A + \alpha) v + A = 0}$$

Se invece si vuol risolvere l'equazione

$$\boldsymbol{A = \alpha\, a_{\overline{m}|x} + \beta\ (1+x)^{-m}\, a_{\overline{n-m}|x}}$$

Si pone

$$v = (1+x)^{-1}$$

e si trova:

$$\boldsymbol{(\alpha-\beta)v^{m+1} + \beta v^{n+1} - (A+\alpha)v + A = 0}$$

ottendo la funzione di iterazione di Newton

$$\boldsymbol{F(v) = \frac{n\beta v^{n+1} + m(\alpha-\beta)v^{m+1} - A}{(n+1)\beta v^{n} + (m+1)(\alpha-\beta)v^{m} - (\alpha+A)}}$$

Caso particolare, ma molto importante

$$\boldsymbol{\alpha = \beta}$$

$$\boldsymbol{F(v) = \frac{A - nv^{n+1}\alpha}{A + \alpha - n\alpha v^n - \alpha v^n}}$$